

Лекция 13. Кейбір функцияларды интегралдау.

Квадрат үшмүшелігі бар функцияларды интегралдау. Мына төмендегі интегралдарды табу әдісін

қарастырайық $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx$ және $\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$.

1) ax^2+bx+c квадрат үшмүшелігіндегі a коэффициентін жақша алдына шығарып, одан толық квадратты бөліп аламыз;

2) интегралға $x + \frac{b}{2a} = t$, $dx = dt$ алмастыруын енгіземіз;

3) Оны екі интегралдың қосындысы етіп жазамыз. Сонда екі интегралымыз да кестелік интегралға келеді.

1-мысал.
$$\int \frac{x+3}{x^2-2x-8} dx = \int \frac{x+3}{x^2-2x+1-8-1} dx = \int \frac{x+3}{(x-1)^2-9} dx = \int \frac{t+1+3}{t^2-9} dt =$$
$$= \int \frac{tdt}{t^2-9} + 4 \int \frac{dt}{t^2-9} = \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2-9)}{t^2-9} - 4 \int \frac{dt}{3^2-t^2} = \left| t^2-9=u \right| = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} - 4 \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} \ln \left| \frac{3+t}{3-t} \right| =$$
$$= \frac{1}{2} \ln |u| - \frac{2}{3} \ln \left| \frac{3+t}{3-t} \right| + C = \left| \begin{array}{l} u = t^2-9 = (x-1)^2-9 = x^2-2x-8 \\ t = x-1 \end{array} \right| = \frac{1}{2} \ln |x^2-2x-8| - \frac{2}{3} \ln \left| \frac{x+2}{4-x} \right| + C.$$

Рационал функцияларды интегралдау. Рационал бөлшектегі интегралдау деп, $\int R(x) dx$ интегралын табуды

айтады. Мұндағы $R(x)$ – дұрыс рационал бөлшек, яғни $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_nx^n}{B_0 + B_1x + B_2x^2 + \dots + B_mx^m}$. Егер

$n < m$ болса, $R(x)$ – дұрыс бөлшек деп, ал $n \geq m$ болса бұрыс бөлшек деп аталады. Бұрыс бөлшекті интегралдау үшін алдымен алымын бөліміне бөлу арқылы оны көпмүшелік пен дұрыс бөлшектің

қосындысына жіктейміз. Мысалы, $\frac{x^4-4x^3+2x^2-1}{x^2-x+1} = x^2-3x-2 + \frac{x+1}{x^2-x+1}$ Одан әрі қарай тек дұрыс

рационал бөлшектерді интегралдауды қарастырамыз.

Теорема. Әрбір дұрыс рационал бөлшекті мына қарапайым бөлшектердің қосындысы түрінде жазуға болады:

1. $\frac{A}{x-a}$; 2. $\frac{A}{(x-a)^k}$ ($k=2,3,4,\dots$); 3. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$; 4. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$; ($k=2,3,4,\dots$), мұндағы A, B -

нақты коэффициенттер; x^2+px+q үшмүшелігінің нақты түбірлері жоқ (яғни $D = \frac{p^2}{4} - q < 0$). **Қарапайым**

бөлшектерді интегралдауды қарастырайық.

1. $\int \frac{Adx}{x-a} = A \ln|x-a| + C.$

2. $k > 1$ мәнінде $\int \frac{Adx}{(x-a)^k} = A \int (x-a)^{-k} dx = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C.$

3. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx$ интегралдау әдісі жоғарыда қарастырылған.

4 . $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} dx$, мұндағы $k > 1$ және бөліміндегі квадрат үшмүшеліктің дискриминанты

$D = p^2 - 4q < 0$. Квадрат үшмүшеліктен толық квадрат бөліп алып $x + \frac{p}{2} = t$, $dx = dt$, алмастыруын

жасаймыз. Сонда $\int \frac{A_1 t + B_1}{(t^2 + m^2)^k} dt$ интегралын аламыз және оны екі интегралдардың қосындысы түрінде

жазамыз. Бірінші интерал t -ны дифференциал астына енгізу арқылы интегралданады:

$$\int \frac{t}{(t^2 + m^2)^k} dt = \frac{1}{2} \int (t^2 + m^2)^{-k} d(t^2 + m^2) = \frac{1}{2} \frac{(t^2 + m^2)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{(x^2 + px + q)^{-k+1}}{-k+1} + C.$$

Ал екінші интегралды $I_k = \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^k}$ деп белгілеп, төменгідей есептейміз:

$$I_k = \frac{1}{m^2} \left(\frac{2k-3}{2k-2} I_{k-1} + \frac{t}{2(k-1)(t^2 + m^2)^{k-1}} \right)$$

Бұл формуланы **рекурренттік формула** деп атайды. Рекурренттік формула арқылы I_2 – ні

$I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + m^2} = \frac{1}{m} \operatorname{arctg} \frac{t}{m} + C$ арқылы, ал I_3 – ті I_2 – арқылы таба отырып, ең соңында I_k – ны I_{k-1} арқылы табамыз.

2- мысал. $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$ табу керек. $I_2 = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$ осыдан $k = 2, m = 1$. $I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg} x + C$,

$$I_2 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2 + 1)} + C . \text{ Сонымен } R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ бөлшегінде } n < m \text{ болсын. Әрбір } Q(x)$$

көпмүшелігін бірінші және екінші дәрежелі көпмүшеліктердің көбейтіндісіне жіктеп жазуға болады:

$$Q(x) = (x-a)^k \cdot (x-b)^l \cdot \dots \cdot (x^2 + px + q)^t \cdot (x^2 + ux + v)^s ,$$

мұндағы $k, l, t, s, \dots$ – бүтін сандар. Сонда дұрыс бөлшек элементар бөлшектерге төменгідей жіктелінеді :

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{B_1}{(x-b)} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_l}{(x-b)^l} \dots \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \\ & + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{M_t x + N_t}{(x^2 + px + q)^t} + \dots \quad (13.1) \end{aligned}$$

мұндағы $A_1, A_2, \dots, A_k, B_1, B_2, \dots, B_l, M_1, N_1, M_2, N_2, \dots, M_t, N_t, \dots$ – нақты сандар. Осы сандарды табу үшін (13.1) теңдігінің оң жағын ортақ бөлімге келтіреміз. Содан соң теңдіктегі екі бөлшектің бөлімін алып тастасақ, екі жағында да көпмүшелік шығады. Осы теңдіктен бірдей дәрежелі x – тің алдындағы коэффициенттерді теңестіре отырып, алгебралық теңдеулер жүйесін құрамыз. Алынған теңдеулер жүйесінен $A_1, A_2, \dots, A_k, B_1, B_2, \dots, B_l, M_1, N_1, M_2, N_2, \dots$ коэффициенттерінің мәндерін тауып, оларды (13.1) теңдігіне қоямыз. Осылай рационал бөлшектің жіктеуін табамыз. Осы әдісті **анықталмаған коэффициенттер әдісі** дейді.

3-мысал. $\int \frac{x^4 - 2x^3 + 3x + 4}{x^3 + 1} dx$ интегралын есептеу керек. Интеграл астындағы функция бұрыс рационал

бөлшек, сондықтан алымын бөліміне бөліп дұрыс бөлшекке айналдырамыз:

$$\frac{x^4 - 2x^3 + 3x + 4}{x^3 + 1} = x - 2 + \frac{2x + 6}{x^3 + 1} = x - 2 + 2 \frac{x + 3}{x^3 + 1} \quad \text{Соңғы қосылғышты қарапайым бөлшектерге жіктейміз:}$$

$$\frac{x + 3}{x^3 + 1} = \frac{x + 3}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1}$$

$$\text{Бұдан, } x + 3 = A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1) \quad x^2: 0 = A + B; \quad x: 1 = -A + B + C; \quad x^0: 3 = A + C$$

$$\Rightarrow A = \frac{2}{3}, \quad B = -\frac{2}{3}, \quad C = \frac{7}{3}. \quad \text{Демек, } \frac{x + 3}{x^3 + 1} = \frac{2}{3(x + 1)} - \frac{2x - 7}{3(x^2 - x + 1)}. \quad \text{Сонымен,}$$

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + 3x + 4}{x^3 + 1} dx = \int \left[x - 2 + \frac{4}{3(x + 1)} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2x - 7}{x^2 - x + 1} \right] dx = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{4}{3} \ln|x + 1| -$$

$$- \frac{2}{3} \left[\int \frac{(2x - 1)dx}{x^2 - x + 1} - 6 \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \right] = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{4}{3} \ln|x + 1| - \frac{2}{3} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{8}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C.$$

Кейбір иррационал функцияларды интегралдау. Иррационал функцияларды интегралдауда айнымалыны алмастыру арқылы рационал функцияның интегралына келуге болатын кейбір жағдайларды қарастырамыз.

$\int R(x, \sqrt[n]{x}) dx$ түріндегі интегралдар $t = \sqrt[n]{x}$ алмастыруы арқылы рационал функцияның интегралына келеді.

4-мысал. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3 + 1}} dx$ интегралын табайық. x -тің дәрежесіндегі бөлшектердің ортақ бөлімі $k = 4$, олай

болса берілген интегралды алу үшін $x = t^4$ ауыстыруын жасаймыз.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[4]{x^3 + 1}} dx &= \left| \begin{matrix} x = t^4 \\ dx = 4t^3 dt \end{matrix} \right| = \int \frac{t^2 \cdot 4t^3}{t^3 + 1} dt = 4 \int \frac{t^5}{t^3 + 1} dt = 4 \int \left(\frac{t^5 + t^2}{t^3 + 1} - \frac{t^2}{t^3 + 1} \right) = 4 \int t^2 dt - 4 \int \frac{t^2 dt}{t^3 + 1} = \\ &= \frac{4t^3}{3} - \frac{4}{3} \int \frac{d(t^3 + 1)}{t^3 + 1} = \frac{4t^3}{3} - \frac{4}{3} \ln|t^3 + 1| + C = \left| t = \sqrt[4]{x} \right| = \frac{4\sqrt[4]{x^3}}{3} - \frac{4}{3} \ln|\sqrt[4]{x^3} + 1| + C. \end{aligned}$$

Қарастырылған интеграл $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax + b}{cx + d}}\right) dx$ түріндегі интегралдың дербес түрі

болады. Мұнда $ad \neq cb$. Осы интегралды $t = \sqrt[n]{\frac{ax + b}{cx + d}}$ алмастыруы арқылы рационал функцияның интегралына келтіруге болады.

Тригонометриялық функцияларды интегралдау. Бұл пунктте біз $\int R(\sin x, \cos x) dx$ интегралын табуды қарастырамыз. Берілген интеграл $t g \frac{x}{2} = t$ **эмбебап алмастыруы** арқылы рационал функцияның интегралына келтіріледі. Шынында да

$$\sin x = \frac{2tg \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad x = 2 \arctg t, \quad dx = \frac{2dt}{1 + t^2}$$

$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t) dt$, мұндағы $R_1(t)$ - рационал функция.

5- мысал.
$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

Бұл әдісті көрсетілген кез келген интегралға қолдануға болады, ал $\sin x$ немесе $\cos x$ айнымалыларының дәрежесі бірден жоғары болса қолайсыз үлкен өрнектер шығады. Ондай жағдайларда келесі әдістерді қолдану керек.

1. $\int \sin^m x \cos^n x dx$ түріндегі интеграл.

а) m — бүтін оң тақ сан болса, интеграл $\int R(\cos x) \sin x dx$ түріне келтіріліп, $\cos x = t$ алмастырылуы жасалынады.

б) n — бүтін оң тақ сан болса, интеграл $\int R(\sin x) \cos x dx$ түріне келтіріліп, $\sin x = t$ алмастырылуы жасалынады.

6- мысал.
$$\int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) d \sin x =$$

$$= |\sin x = t| = \int (1 - t^2) dx = t - \frac{t^3}{3} + C = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

в) m, n — бүтін теріс емес жұп сан болса, $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ формулалары арқылы $\sin x$ пен $\cos x$ — тің реттері төмендетіледі.

2. Мына $\int \sin mx \cos nx dx$, $\int \cos mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \sin nx dx$, мұндағы m, n — тұрақты сандар, түріндегі интегралды алу үшін тригонометрияның формулаларын:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)), \quad \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)),$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

қолдану және көбейтінділерді қосындыға жіктеу арқылы берілген интегралды алу қиынға түспейді.